(MAT5SKC) **(3110-53K)**

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, FEBRUARY 2023.

(Regular)

Third Year — Fifth Semester

Part II : Mathematics

Paper VI — MULTIPLE INTEGRALS AND APPLICATIONS OF VECTOR CALCULUS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 2 = 10 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Evaluate $\int_0^2\int_0^3 xydxdy$.

   $\int_0^2\int_0^3 xydxdy$ ను కనుగొనుము.

2. Evaluate $\int_0^a\int_0^x (x^2+y^2)dx\,dy$.

   $\int_0^a\int_0^x (x^2+y^2)dx\,dy$. ను కనుగొనుము.

3. If $\bar{r} = e^{-t}\bar{i} + \log(t^2+1)\,\bar{j} = Tan t\,\bar{k}$ then find $\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$ at $t=0$.

   $\bar{r} = e^{-t}\bar{i} + \log(t^2+1)\,\bar{j} = Tan t\,\bar{k}$ అయిన $t=0$ వద్ద $\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|$ విలువ కనుగొనుము.

4. If $\bar{F} = (x+3y)\bar{i} + (y-2z)\bar{j} + (x+pz)\bar{k}$ is solenoidal then find P.

   $\bar{F} = (x+3y)\bar{i} + (y-2z)\bar{j} + (x+pz)\bar{k}$ సొలినాయిడల్ అయిన P విలువ కనుగొనుము.

5. Evaluate $\int_0^1 \left(e^t\bar{i} + e^{-2t}\bar{j} + t\bar{k}\right)dt$.

   $\int_0^1 \left(e^t\bar{i} + e^{-2t}\bar{j} + t\bar{k}\right)dt$ ను కనుగొనుము.

6. Define smooth curve.

   మృదువైన వక్రతను నిర్వచింపుము.

7. Apply Gauss theorem to prove that $\int_5 \bar{r} \cdot \overline{N}\, ds = 3V$.

గాస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి $\int_5 \bar{r} \cdot \overline{N}\, ds = 3V$ అని నిరూపించుము:

8. Prove that $\oint_C f\ \nabla f \cdot d\bar{r} = 0$ by Stoke's theorem.

స్టోక్స్ సిద్ధాంతం ద్వారా $\oint_C f\ \nabla f \cdot d\bar{r} = 0$ అని నిరూపించుము.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

9. Evaluate $\iint xy\left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$ over $[0, a; 0, b]$.

$[0, a; 0, b]$పై $\iint xy\left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$ ను కనుగొనుము.

10. By changing into polar coordinates, evaluate the integral $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$.

ధృవ నిరూపకాలుగా మార్చడం ద్వారా సమాకలనం $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$.

11. Evaluate $\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dxdydz$.

$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dxdydz$ ను కనుగొనుము.

12. Find the angle between the sentences $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $x^2 + y^2 - z = 3$ at $(2, -1, 2)$.

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ మరియు $x^2 + y^2 - z = 3$ ఉపతలాల మధ్య $(2, -1, 2)$ బిందువు వద్ద కోణాన్ని కనుగొనుము.

13. If $\overline{F} = x^2 z\, \bar{i} - 2y^3 z^2 \bar{j} + xy^2 z \bar{k}$ then find $div\overline{F}$ and $curl\overline{F}$ at $(1, -1, 1)$.

$\overline{F} = x^2 z\, \bar{i} - 2y^3 z^2 \bar{j} + xy^2 z \bar{k}$ అయిన $(1, -1, 1)$ వద్ద $div\overline{F}$ మరియు $curl\overline{F}$ అను కనుగొనుము.

14. If $\bar{f} = \left(2x^2 y - x^4\right) \bar{i} + \left(e^{xy} - y \sin x\right) \bar{j} + x^2 \cos y\ \bar{k}$ then find $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}$.

$\bar{f} = \left(2x^2 y - x^4\right) \bar{i} + \left(e^{xy} - y \sin x\right) \bar{j} + x^2 \cos y\ \bar{k}$ అయిన $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}$ లను కనుగొనుము.

15. Find $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ curve C is the arc of $y = x^2$ in xy plane from (0, 0) to (1, 1) and $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j}$.

(0, 0) నుండి (1, 1) వరకు xy తలంలో $y = x^2$ యొక్క చాపము C మరియు $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j}$ అయిన $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ ను కనుగొనుము.

16. Evaluate by Green's theorem, $\oint_C \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(x^2 y + 3\right) dy$ where C is the boundary of the region enclosed by $y^2 = 8x$ and $x = 2$.

గ్రీన్ సిద్ధాంతం ద్వారా $\oint_C \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(x^2 y + 3\right) dy$ ను కనుగొనుము ఇక్కడ $y^2 = 8x$ మరియు $x = 2$ల యొక్క హద్దులతో పరిబద్ధమైన ప్రాంతము C.

SECTION C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions.

17. (a) Change the order of integration and evaluate $\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} dx\, dy$.

సమాకలనులను మార్చును మరియు $\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} dx\, dy$ ను సాధించుము.

Or

(b) Using the transformation $x + y = u, x - y = v$, evaluate $\iint e^{\frac{x-y}{x+y}} dx\, dy$ over the region bounded by $x = 0, y = 0, x + y = 1$.

$x + y = u, x - y = v$ పరివర్తనను ఉపయోగించి $x = 0, y = 0, x + y = 1$ చే పరిబద్ధమైన ప్రాంతంలో $\iint e^{\frac{x-y}{x+y}} dx\, dy$ ను కనుగొనుము.

18. (a) Find the volume of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

గోళము $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ యొక్క ఘనపరిమాణాన్ని కనుగొనుము.

Or

(b) Find the area common to $r = a\sqrt{2}$ and $r = 2a\cos\theta$.

$r = a\sqrt{2}$ మరియు $r = 2a\cos\theta$ కు ఉమ్మడిగా ఉన్న వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

19. (a) If $a = x + y + z$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, $c = xy + yz + zx$ then show that $[\nabla a \; \nabla b \; \nabla c] = 0$.

$a = x + y + z$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, $c = xy + yz + zx$ అయిన $[\nabla a \; \nabla b \; \nabla c] = 0$ అని చూపుము.

Or

(b) Prove that $grad(\overline{A} \cdot \overline{B}) = (\overline{B} \cdot \nabla)\overline{A} + (\overline{A} \cdot \nabla)\overline{B} + \overline{B} \times (Curl\overline{A}) + \overline{A} \times (Curl\overline{B})$.

$grad(\overline{A} \cdot \overline{B}) = (\overline{B} \cdot \nabla)\overline{A} + (\overline{A} \cdot \nabla)\overline{B} + \overline{B} \times (Curl\overline{A}) + \overline{A} \times (Curl\overline{B})$ అని నిరూపించుము.

20. (a) If $\overline{F} = (x \;\; + y^2)\overline{i} - 2x\overline{j} + 2yz\overline{k}$, evaluate $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N} \, d s$, where S is the surface of plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.

$\overline{F} = (x \;\; + y^2)\overline{i} - 2x\overline{j} + 2yz\overline{k}$, అయిన $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N} \, d s$ ను కనుగొనుము. ఇక్కడ S మొదటి అష్టాంశంలో $2x + y + 2z = 6$ అను తలం యొక్క ఉపరితలం.

Or

(b) If $\overline{F} = 2x > \overline{i} - x\overline{j} + y^2\overline{k}$, evaluate $\int \overline{F} \, dv$ where V is the region bounded by the surfaces $x = 0, y = 0, y = 6, z = x^2, z = 4$.

$\overline{F} = 2x > \overline{i} - x\overline{j} + y^2\overline{k}$ అయిన $\int \overline{F} \, dv$ ను కనుగొనుము ఇక్కడ V అనునది $x = 0, y = 0, y = 6, z = x^2, z = 4$ ఉపరితలాల చేత పరిబద్ధమైన ప్రాంతం.

21. (a) State and prove Gauss divergence theorem.

గౌస్ –అభిసరణ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Verify Stoke's theorem to evaluate $\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$, where $\overline{F} = y^2\overline{i} + x^2\overline{j} - (x + z)\overline{k}$ and C is the boundary of the triangle with vertices (0, 0, 0), (1, 0, 0) and (1, 1, 0).

స్టోక్స్ సిద్ధాంతంను సరిచూసి $\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ ను కనుగొనుము. ఇక్కడ $\overline{F} = y^2\overline{i} + x^2\overline{j} - (x + z)\overline{k}$ మరియు (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) శీర్షాలతో ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క పరిబద్ధమైన ప్రాంతం C.